ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VIỆT BÌNH

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO TỰA NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VIỆT BÌNH

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO TỰA NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Đỗ Văn Lưu

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TS. Đỗ Văn Lưu. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 3 năm 2020

Tác giả

Vũ Việt Bình

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, GS. TS. Đỗ Văn Lưu.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 3 năm 2020

Tác giả

Vũ Việt Bình

Bảng ký hiệu

coM	bao lồi của tập M
$\overline{co}M$	bao lồi đóng của tập M
$coneM$	nón lồi sinh ra bởi M
M^-	cực âm của M
M^s	cực âm chặt của M
X^*	không gian đối ngẫu tô pô của không gian X
$T(M, \overline{x})$	nón tiếp liên của M tại $\overline{x}$
$T_C(M, \overline{x})$	nón tiếp tuyến Clarke của M tại $\overline{x}$
$N(M, \overline{x})$	nón pháp tuyến Clarke của M tại $\overline{x}$
$f^-(\overline{x}, d)$	đạo hàm Dini dưới của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$f^+(\overline{x}, d)$	đạo hàm Dini trên của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$f^0(\overline{x}, d)$	đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$\partial_C f(\overline{x})$	dưới vi phân Clarke của f tại $\overline{x}$
$\partial f(\overline{x})$	dưới vi phân của hàm lồi f tại $\overline{x}$
t. ư.	tương ứng
KT	Kuhn-Tucker
$KTVCP$	điểm tới hạn vectơ Kuhn- Tucker

Mở đầu

1. Mục đích của đề tài luận văn

Khi tính toán các nghiệm hữu hiệu, sau một số hữu hạn bước, các thuật toán tối ưu chỉ cho ta các nghiệm hữu hiệu xấp xỉ. Vì vậy việc nghiên cứu các nghiệm hữu hiệu xấp xỉ là rất cần thiết. Từ đó dẫn đến việc nghiên cứu các tựa nghiệm hữu hiệu. Golestani–Sadeghi–Tavan (2017) đã nghiên cứu các điều kiện tối ưu Kuhn- Tucker cho tựa nghiệm hữu hiệu yếu (weak quasi efficient solution) và tựa nghiệm hữu hiệu (quasi efficient solution) và các định lý đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn.

Luận văn trình bày các điều kiện cần và các điều kiện đủ cho tựa nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm Lipschitz địa phương qua dưới vi phân Clarke của M. Golestani, H. Sadeghi, Y. Tavan đăng trong tạp chí *Numerical Functional Analysis and Optimization* **38**(2017), 883-704 về điều kiện cần và đủ Kuhn-Tucker, đối ngẫu yếu, mạnh và đối ngẫu ngược.

2. Nội dung của đề tài luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 với tiêu đề: *"Kiến thức chuẩn bị"* trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân Clarke, nón tiếp tuyến và nón pháp tuyến Clarke.

Chương 2 với tiêu đề: *"Điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu"* trình bày các kết quả nghiên cứu mới đây của M. Golestani, H. Sadeghi, Y. Tavan đăng trong tạp chí *Numerical Functional Analysis and Optimization*

38(2017), 683-704 về điều kiện cần và đủ Kuhn-Tucker, đối ngẫu yếu, mạnh và đối ngẫu ngược.

Chương 3 với tiêu đề: "*Đối ngẫu*" trình bày các định lý đối ngẫu yếu, mạnh và đối ngẫu ngược cho tựa nghiệm hữu hiệu của bài toán đối ngẫu Mond-Weir của bài toán (MP).

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 3 năm 2020

Tác giả luận văn

Vũ Việt Bình

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân Clarke, nón tiếp tuyến và nón pháp tuyến Clarke và một số kiến thức cần dùng trong các chương sau. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo trong [1,2,4].

1.1. Dưới vi phân Clarke

Giả sử $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ và $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ là hai vectơ trong $\mathbb{R}^\ell$. Các kí hiệu sau đây sẽ được sử dụng sau này:

$$
\begin{aligned}
x = y, &\quad \text{nếu } x_i = y_i, \quad \text{với mọi } i,\\
x \leqq y, &\quad \text{nếu } x_i \leq y_i, \quad \text{với mọi } i,\\
x < y, &\quad \text{nếu } x_i < y_i, \quad \text{với mọi } i,\\
x \leq y, &\quad \text{nếu } x \leqq y \text{ và } x \neq y.
\end{aligned}
$$

Giả sử M là một tập con của $\mathbb{R}^\ell$. Thông thường, cl M, int M, co(M) và cone (M) được kí hiệu là bao đóng, phần trong, bao lồi và nón sinh bởi M tương ứng. Cực âm và cực âm chặt của M được xác định bởi

$$
\begin{aligned}
M^- &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^\ell \middle| \langle \xi, \nu \rangle \leq 0, \quad \forall \nu \in M \right\},\\
M^s &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^\ell \middle| \langle \xi, \nu \rangle < 0, \quad \forall \nu \in M \right\},
\end{aligned}
$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^\ell$.

Ta nhắc lại một số kí hiệu thông thường trong giải tích không trơn (xem [2]).

Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương.

Định nghĩa 1.1 Đạo hàm theo phương suy rộng (generalized directional derivative) của φ tại x theo phương ν được xác định như sau

$$\varphi^\circ(x;\nu) = \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{\varphi(y+t\nu)-\varphi(y)}{t}.$$

Định nghĩa 1.2 Dưới vi phân Clarke (Clarke's subdifferential) của φ tại x được định nghĩa bởi

$$\partial_C\varphi(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^\ell | \langle \xi, \nu\rangle \le \varphi^\circ(x;\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}^\ell\}.$$

Chẳng hạn, hàm $f(x) = \|x - x_0\|$ không khả vi tại x_0 và dưới vi phân Clarke của nó tại x_0 là hình cầu đơn vị đóng $B[0,1] := \mathbf{B}$ trong $\mathbb{R}^\ell$.

Định nghĩa 1.3 Dưới vi phân của hàm lồi $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ tại $\overline{x} \in \mathbb{R}^\ell$ được xác định như sau:

$$\partial\varphi(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^\ell : \langle \xi, x - \overline{x}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\overline{x})\}.$$

Ta biết rằng ánh xạ $\nu \mapsto \varphi^\circ(x;\nu)$ là một hàm lồi, dưới vi phân của nó (theo nghĩa giải tích lồi, xem [1]) tại $\nu = 0$ tồn tại và được kí hiệu là $\partial\varphi^\circ(x;\cdot)(0)$ và khẳng định sau là đúng:

$$\partial_C\varphi(x) = \partial\varphi^\circ(x;\cdot)(0).$$

Sau đây là một số tính chất của dưới vi phân Clarke của một hàm Lipschitz địa phương.

Bổ đề 1.1 [2] *Giả sử $\varphi, \psi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương trong một lân cận của $x \in \mathbb{R}^\ell$. Khi đó các phát biểu sau là đúng:*

i) *$\partial_C\varphi(x)$ là tập con khác rỗng, compact và lồi của $\mathbb{R}^\ell$.*

ii) *Với mọi $\nu \in \mathbb{R}^\ell$, $\varphi^\circ(x;\nu) = \max\{\langle \xi, \nu\rangle | \xi \in \partial_C\varphi(x)\}$.*

iii) *Với bất kì số $\lambda, \partial_C\lambda\varphi(x) = \lambda\partial_C\varphi(x)$.*

iv) *Hàm $\nu \mapsto \varphi^\circ(x;\nu)$ là hữu hạn, thuần nhất dương và dưới tuyến tính trên $\mathbb{R}^\ell$.*

v) *Nếu φ và ψ là hai hàm lồi thì có $\partial_C(\varphi+\psi)(x) = \partial_C\varphi(x) + \partial_C\psi(x)$.*